1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) - ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο, σελ.

Α2)

α) ΨΕΥΔΗΣ

β) Η συνάρτηση $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ καθώς ισχύουν

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \\ f(0)=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\ ,$$

ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη διότι:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x}=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x}=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ne \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Α3) Θεωρία, Σχολικό Βιβλίο, σελ.

Α4) **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1) $f(x)=\ln x,\ A_f=(0,+\infty)$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}, A_g=R-\{1\}$

$$A_{f\circ g}=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x\ne 1/ g(x)>0\}=\left\{x\ne 1/ \frac{x}{1-x}>0\right\}=\{x\ne 1/ 0<x<1\}=(0,1)$$

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\ln\frac{x}{1-x}$$

Β2) Η $h(x)=\ln\dfrac{x}{1-x},\ 0<x<1$.

Είναι $h'(x)=\dfrac{1-x}{x}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1-x}{x}\dfrac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{1-x}{x}\dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{x(1-x)}>0$ και αφού η $h(x)$ είναι συνεχής στο $(0,1)$ η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε και ένα προς ένα συνάρτηση.

Έτσι η $h(x)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση με $A_{h^{-1}}=h(A)=(\lim\limits_{x\to 0^+}h(x),\ \lim\limits_{x\to 1^-}h(x))=(-\infty,+\infty)$

➢ $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\dfrac{x}{1-x} \overset{u=\frac{x}{1-x}}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

➢ $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln\dfrac{x}{1-x} \overset{u=\frac{x}{1-x}}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

Έστω $h(x) = y \Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y \Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \dfrac{e^y}{e^y+1}$

Ισχύει $h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(y) \Leftrightarrow h^{-1}(y) = \dfrac{e^y}{e^y+1}$, άρα $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}, x \in R$.

B3) $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}, x \in R$ συνεχής ως ρητή.

$\varphi'(x) = \dfrac{e^x \cdot (e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν υπάρχουν ακρότατα.

$$\varphi''(x) = \frac{e^x \cdot (e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x \cdot (e^x+1) \cdot \left(e^x+1-2e^x\right)}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x \cdot \left(1-e^x\right)}{(e^x+1)^3}$$

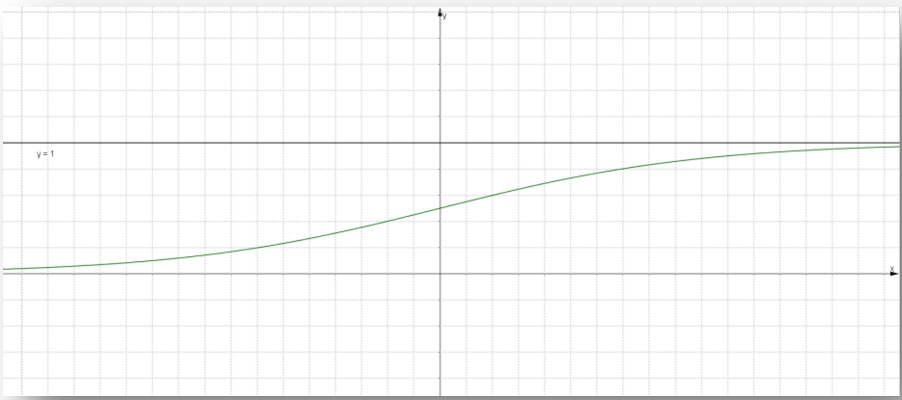
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^x$	+	0	−
φ''	+	0	−
φ	∪	0	∩

Η $\varphi(x)$ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$, το $(0, f(0)) \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$ σημείο καμπής συνάρτησης.

B4)

➢ $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$ οπότε η y=1 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$,

➢ $\lim\limits_{x\to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = 0$ οπότε η y=0 οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $f(x) = -\eta\mu x\,, x \in [0,\pi]$ παραγωγισιμη ως τριγωνομετρική με $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$
Έστω $(\varepsilon): \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η εφαπτόμενη της Cf στο $M(x_0, f(x_0))$ οπου $x_0 \in [0,\pi]$.

➢ $A\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \in (\varepsilon) \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0 - x_0\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$$

Θεωρούμε $g(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x - x\sigma\upsilon\nu x\,,\; x \in [0,\pi]$ με $g'(x) = \eta\mu x(x - \frac{\pi}{2})$

Προφανείς λύσεις : $g(0) = g(\pi) = 0$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \geq 0 \xLeftrightarrow{\eta\mu x>0} x \geq \frac{\pi}{2}$ άρα η μονοτονία της g είναι :

x	**0**	**π/2** **π**
g'(x)	-	+
g(x)	↘	↗

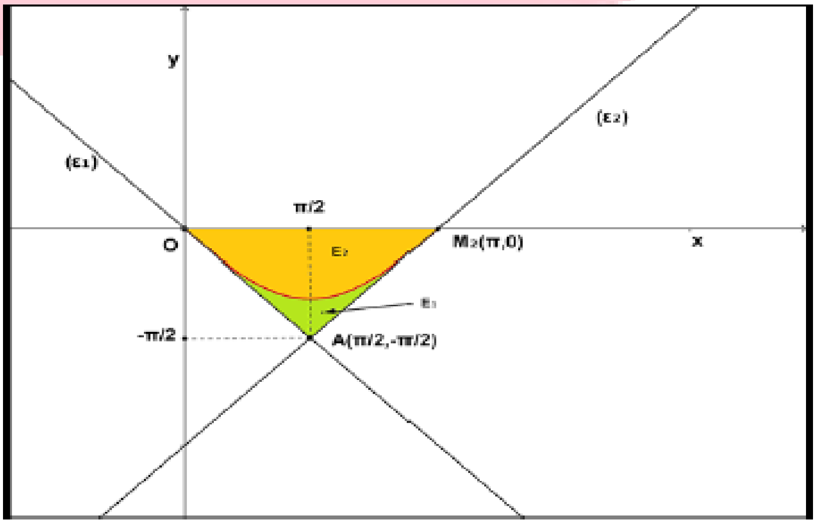
Στο διάστημα [0,π/2] η g γνησίως φθίνουσα άρα η εξίσωση g(x)=0 έχει μοναδική λύση το 0

Στο διάστημα [π/2,π] η g γνησίως αύξουσα άρα η εξίσωση g(x)=0 έχει μοναδική λύση το π

➢ Οι εφαπτόμενες της f στα σημεία $O(0,0)$ και $M_2(\pi,0)$ είναι αντίστοιχα :

$$(\varepsilon_1): \; y = -x \;\; \kappa\alpha\iota \; (\varepsilon_2): \; y = x - \pi$$

Γ2)



➢ $E_2 = \int_0^{\pi}|f(x)|dx = \int_0^{\pi}\eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = 2\; \tau.\mu.\quad (f(x) < 0\;\; \acute{o}\tau\alpha\nu\; x \in [0,\pi]\,)$

➢ $(OAM_2) = \frac{1}{2}(OM_2)(AK) = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}\;\; \tau.\mu.$. Άρα $E_1 = (OAM_2) - E_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2\;\; \tau.\mu.$

➢ $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$

Γ3) Από το σχήμα στο Γ2 ερώτημα έχουμε ότι f κυρτή στο [0,π] επίσης $y=x-\pi$ εφαπτόμενη της Cf στο π άρα $f(x)\geq y \Leftrightarrow f(x)\geq x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi\geq 0$

➢ $\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{f(x)-x+\pi}(f(x)+x)=+\infty\cdot\pi=+\infty$

Γ4) Εχουμε $f(x)-x+\pi\geq 0 \overset{x\in[1,e]}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x)}{x}-1+\frac{\pi}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}\geq 1-\frac{\pi}{x}$ αφού η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής τότε $\frac{f(x)}{x}-1+\frac{\pi}{x}\geq 0$ και δεν είναι παντού μηδέν άρα :

➢ $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx=[x-\pi\ln x]_1^e=e-1-\pi$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) ***Απόδειξη Συνέχειας***

- Για $x\in[-1,0)$, έχουμε $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$, η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.
- Για $x\in(0,\pi]$, έχουμε $f(x)=e^x\eta\mu x$, η οποία είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών.
- Για $x=0$, έχουμε:

$f(0)=e^0\cdot\eta\mu 0=0$.

$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\eta\mu x\right)=0$.

Άρα λοιπόν $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

Τελικά, η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

Εύρεση Κρίσιμων Σημείων

- Για $x\in(-1,0)$, έχουμε $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)'=\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}\cdot(-x)'=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$.

Άρα $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(-1,0)$.

- Για $x\in(0,\pi)$, έχουμε: $f'(x)=\left(e^x\eta\mu x\right)'=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=-1\overset{x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow}x=\frac{3\pi}{4}$.

- Για $x=0$, έχουμε:

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}-0}{-(-x)}=-\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{-x}=0$.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\eta\mu x-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\frac{\eta\mu x}{x}\right)=e^0\cdot 1=1$.

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άρα λοιπόν, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα: $\mathrm{O}(0,f(0))\to\mathrm{O}(0,0)$ και $\mathrm{A}\left(\frac{3\pi}{4},f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\to\mathrm{A}\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$

Δ2) ***Εύρεση Μονοτονίας***

- Για κάθε $x \in (-1,0)$, έχουμε ότι $f'(x) < 0$.
- Για $x \in (0,\pi)$, έχουμε: $f'(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$.

Η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και η μοναδική της ρίζα είναι το $\frac{3\pi}{4}$, οπότε η g θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

Είναι $g(0) = 1 > 0$, άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$, άρα και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$.

Είναι $g(\pi) = -1 < 0$, άρα $g(x) < 0$ για κάθε $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, άρα και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων για την f'

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
f'		$-$		$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Αφού $f'(x) < 0$ για $x \in (-1,0)$ και f συνεχής στο $[-1,0]$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$.

Αφού $f'(x) > 0$ για $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και f συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$.

Αφού $f'(x) < 0$ για $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ και f συνεχής στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

Εύρεση Ακροτάτων

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$, το $f(-1) = 1$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 0$, το $f(0) = 0$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3 = \frac{3\pi}{4}$, το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_4 = \pi$, το $f(\pi) = 0$.

Εύρεση Συνόλου Τιμών

Αφού η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$, τότε το ολικό της ελάχιστο θα είναι η μικρότερη τιμή από τα τοπικά της ακρότατα και το ολικό της μέγιστο θα είναι αντίστοιχα η μεγαλύτερη τιμή από αυτά.

Έστω $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} > \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}} > 2$, ισχύει αφού $e^{\frac{3\pi}{2}} > e > 2$.

Άρα λοιπόν $f([-1,\pi]) = \left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Δ3) Ζητείται το $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\eta\mu x-e^{5x}\right|dx=\int_0^{\pi}e^x\left|\eta\mu x-e^{4x}\right|dx$ (1)

Για κάθε $x\in[0,\pi]$, ισχύει ότι $0\le\eta\mu x\le 1$.

Για κάθε $x\ge 0\Leftrightarrow 4x\ge 0\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}e^{4x}\ge e^0\Leftrightarrow e^{4x}\ge 1$.

Άρα λοιπόν $\eta\mu x\le 1\le e^{4x}\Rightarrow\eta\mu x-e^{4x}\le 0$.

Οπότε από (1) θα έχουμε: $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{\pi}e^x\left(e^{4x}-\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx$ (2).

- Είναι: $\mathrm{I}_1=\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}$.

- Είναι: $\mathrm{I}_2=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}(e^x)'\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=(0-0)-\int_0^{\pi}(e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx=$

$$-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x(-\eta\mu x)dx=-(-e^{\pi}-1)-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=e^{\pi}+1-\mathrm{I}_2\Leftrightarrow 2\mathrm{I}_2=e^{\pi}+1\Leftrightarrow\mathrm{I}_2=\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

Άρα από (2) προκύπτει $\mathrm{E}(\Omega)=\frac{e^{5\pi}-1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}\Leftrightarrow\mathrm{E}(\Omega)=\frac{2e^{5\pi}-5e^{\pi}-7}{10}\tau.\mu.$

Δ4) Έχουμε την εξίσωση: $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$$16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{(4x-3\pi)^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\ (3)$$

Προφανής ρίζα της εξίσωσης (3) είναι η $x=\frac{3\pi}{4}$.

Αφού $f\left([-1,\pi]\right)=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$, τότε $f(x)\le f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$.

Επίσης $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $x\ne\frac{\pi}{4}$, τότε $f(x)<f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$, οπότε η (3) είναι αδύνατη.

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=\frac{3\pi}{4}$.